2015年度 入ゼミ試験問題

以下の問題は、尾山大輔＋安田洋祐・編著『[改訂版] 経済学で出る数学』日本評論社から引用した。

［1］　ある市場の逆需要関数が

$$P(Q) = 100 - Q$$

で与えられているとする (つまり，総供給量が Q のときの市場価格は $P(Q)$).

(1) いまこの市場で，1 単位あたり 20 の費用で生産できる企業が 1 社だけ操業しているとする．このとき，企業にとって最適な生産量 Q^{M} と，そのもとでの価格 p^{M}，利潤 π^{M} および消費者余剰 CS^{M} をそれぞれ求めなさい．

(2) 1 単位あたり 20 の費用で生産できる企業が 2 社，数量競争をしているとする．このとき，ナッシュ均衡における各企業の生産量 $q_1^{\mathrm{C}}, q_2^{\mathrm{C}}$ と，そのもとでの価格 p^{C}，利潤 $\pi_1^{\mathrm{C}}, \pi_2^{\mathrm{C}}$ および消費者余剰 CS^{C} をそれぞれ求めなさい．

---

［2］　費用関数が

$$C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + 72$$

で与えられる企業を考える．

(1) 限界費用関数 $MC(x)$ を求めなさい．

(2) 平均費用関数 $AC(x)$，平均可変費用関数 $AVC(x)$ を求めなさい．

(3) 供給関数 $S(p)$ を求めなさい．また，供給曲線を限界費用関数，平均費用関数，平均可変費用関数のグラフとともに xp 平面に図示しなさい．

---

［3］　(1) ある個人の第 1 財・第 2 財の消費に対する効用関数が

$$u(x_1, x_2) = (x_1)^3(x_2)^2$$

で与えられている．この個人の所得が 100，第 1 財・第 2 財の価格がそれぞれ 4, 5 であるとき，効用を最大化する消費量 x_1^*, x_2^* を求めなさい．

(2) ある個人の第 1 財・第 2 財の消費に対する効用関数が

$$u(x_1, x_2) = 4\log x_1 + \log x_2$$

で与えられている．この個人の所得が 3000，第 1 財・第 2 財の価格がそれぞれ 5, 2 であるとする．所得税が 10%，消費税が 8% のとき，効用を最大化する消費量 x_1^*, x_2^* を求めなさい．

(3) ある個人の第 1 財・第 2 財の消費に対する効用関数が

$$u(x_1, x_2) = (x_1)^3(x_2)^4$$

で与えられている．第 1 財・第 2 財の価格がそれぞれ 1, 4 であるとする．この個人は当初第 1 財・第 2 財をそれぞれ 20 単位，30 単位保有しており，これらを市場で好きなだけ売却・購入できる．効用を最大化するためには第 1 財・第 2 財をそれぞれ何単位売却あるいは購入すればよいか．

---

[4] ある財 (X と呼ぶ) の市場を考える．この財の価格を p で表す．

(1) 財 X を生産する企業が 100 社ある．それぞれの企業は同一の費用関数

$$C(x) = 100x^2 + 20x$$

をもっている (x は財 X の生産量)．このとき，各企業の供給関数 $s(p)$ と総供給関数 $S(p)$ を求めなさい．

(2) 消費者が 1000 人いて，それぞれの消費者は財 X とその他の財について同一の効用関数

$$u(x, m) = -\frac{500}{3}x^2 + 90x + m$$

をもっている (x は財 X の消費量，m はその他の財の消費への支出額，ただし x については $x \leq \dfrac{27}{100}$ の範囲で考える)．このとき，財 X に対する各消費者の需要関数 $d(p)$ と総需要関数 $D(p)$ を求めなさい．

(3) 財 X 市場における均衡価格 p^* を求めなさい．

[5] 水産資源の量的管理の問題について単純化された生態系モデルで考えよう．ある漁場における漁は毎年産卵期前に終了する．ある年の産卵期に x 万トン ($x \geq 0$) の魚が生息しているとき，産卵・孵化・成長を経て，翌年の漁期前には魚の量が $\sqrt{x}$ 万トンになるとする．これは，

- $0 < x < 1$ のとき $\sqrt{x} > x$ なので，翌年の魚の量が増加し，
- $x > 1$ のときは $\sqrt{x} < x$ なので，魚が多すぎて翌年の魚の量が減少する

という状況を描写している．初期 (1 年目の漁期前) の魚の量が c 万トン ($c > 0$) であるとして，次の問いに答えなさい．

(1) この漁場において漁業が行われておらず漁獲がまったくないとする．このとき，t 年目の魚の量は $x_{t+1} = \sqrt{x_t}$ という漸化式で定義される数列 x_t で表される．この数列 x_t は収束するだろうか．収束するならば，その極限を求めなさい．

(2) 次に，この漁場で漁業が営まれているとする．この漁場では漁獲量に関する規制があり，1 年あたり L 万トン ($L \geq 0$) という上限が設けられているとする．魚市場における需要は非常に旺盛であり，この漁場の魚は規制の範囲内で獲れるだけ獲られてしまうと仮定する．t 年目の漁期前の魚の量を y_t 万トンとするとき，数列 y_t が満たすべき漸化式を書きなさい．

(3) 年間の漁獲量の上限を $L = 0.21$ 万トンとする．このとき，(2) で求めた漸化式の定常状態をすべて求め，それぞれについて安定的か不安定かを調べなさい．また，c の値に応じて数列 y_t の極限を求めなさい．(グラフを描いて考えなさい．)