

2016年度 入ゼミ試験問題

注意事項

- 試験時間は 100 分とする。途中退出は自由。
- トイレに行きたくなったり具合が悪くなった場合は、監督者に申し出ること。
- 筆記用具以外の持込は不可。
- 答案用紙は持ち帰らないこと。
- 途中の計算も記述すること。
- 論述力を重視するので、証明はできるだけ詳しく正確にきちんと記述すること。
- 合格者は、
吹田、新保著「理工系の微分積分学」(学術図書出版)
を購入し、第 1 回目のゼミのときに持参すること。

実数の全体を \mathbb{R} 、1 次関数の全体を \mathcal{L} で表す。つまり、 \mathcal{L} は、2 つの実数 a, b によって $l(x) = ax + b$ と表現できる関数 $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の全体である。さらに、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、

$$\mathcal{L}_f := \{l \in \mathcal{L} \mid \text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ に対して } l(x) \leq f(x)\}$$

と定義する。 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) = \sup\{l(x) \mid l \in \mathcal{L}_f\}$$

を満たすとき、条件 C を満たすという。以下の問いに答えよ。

1. \mathcal{L} が線型空間を成すことを示せ。
2. $f(x) = |x|$ とする。
 - (a) \mathcal{L}_f を求めよ。
 - (b) f が条件 C を満たすことを確認せよ。
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は 2 階微分可能で、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f''(x) \geq 0$ が成立しているものとする。このとき、 f は条件 C を満たすことを示せ。
4. 条件 C を満たす関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して以下が成立することを証明せよ:
任意の $x, y \in \mathbb{R}$ と任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

以上