

2013年度 入ゼミ試験問題

注意事項

- 制限時間は2時間とする。途中退出は自由。
- トイレに行きたくなったり具合が悪くなった場合は、監督者に申し出ること。
- 筆記用具以外の持込は不可。
- 答案用紙は持ち帰らないこと。
- 計算の途中経過も全て記述すること。
- 最初の問題が不正解の場合は不合格とする。
- 最初の問題が正解で、残り5題(4の(a), (b)はそれぞれ1題とカウントする)中2題以上正解の場合は、合格とする。
- 最初の問題が正解で、全体で2題以下しか正解していない場合は、他の受験生の出来も考慮の上で可否を判断する。
- 合格者は、
シナイ著，森真訳「シナイ確率論入門コース」(丸善)
吹田，新保著「理工系の微分積分学」(学術図書出版)』
を購入し，第1回目のゼミのときに持参すること。

1.

$$\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx$$

を求めよ.

2. 任意の実数 x に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

であることを用いて,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

を求めよ.

3. x を絶対値が 1 より小さい実数とする. このとき,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

が成立することを用いて,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

を示せ. 但し, 対数は自然対数である.

4. 関数 $y = f(x)$ に関して, その定義域全体で

$$x = y - \frac{y^2}{4}$$

が成立しているものとする. 但し, 値域は $(0, 2)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(a) $f(x)$ の定義域を定めよ.

(b) $f(x)$ を求めよ.

5. 分数 $\frac{1}{3}$ を小数で表示すると $0.333\dots$ となる. つまり, $\frac{1}{3} = 0.333\dots$ が成立する. この両辺に 3 を掛けると,

$$1 = 0.999\dots \tag{1}$$

を得る. 式 (1) は何となく矛盾を含んでいるようにも見える. 式 (1) が正しいと思うならば, 上記の議論以外の方法でその根拠を明らかにせよ. また, 式 (1) が正しくないと思うのであれば, 上記の議論のどこに誤りがあるのか指摘せよ.

以上